

**Определение обобщенных сил.** Имеем сумму элементарных работ сил, действующих на точки системы, на возможном перемещении системы:

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k. \quad (14)$$

Пусть голономная система имеет  $n$  степеней свободы и, следовательно, ее положение в пространстве определяется  $n$  обобщенными координатами  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Тогда для  $\delta \bar{r}_k$ , согласно (13), имеем

$$\delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (13')$$

Подставляя (13') в (14) и изменяя порядок суммирования по индексам  $k$  и  $i$ , получим

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i, \quad (14')$$

где скалярная величина

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$$

называется *обобщенной силой, отнесенной к обобщенной координате  $q_i$* . Используя известное выражение для скалярного

394

произведения двух векторов, обобщенную силу можно также представить в виде

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right), \quad (15)$$

где  $F_{kx}, F_{ky}, F_{kz}$  — проекции силы на оси координат;  $x_k, y_k, z_k$  — координаты точки приложения силы  $\bar{F}_k$ .

**Размерность обобщенных сил.** Размерность обобщенной силы в соответствии с (14') следующим образом зависит от размерности  $\delta q_i$ , совпадающей с размерностью  $q_i$ :

$$[Q_i] = \frac{[\delta A]}{[\delta q_i]} = \frac{[A]}{[q_i]}, \quad (16)$$

т. е. размерность обобщенной силы равна размерности работы силы (энергии) или момента силы, деленной на размерность обобщенной координаты, к которой отнесена обобщенная сила. Если  $[q_i]$  — длина, то

$$[Q_i] = \frac{\text{работа}}{\text{длина}} = \frac{\text{сила} \cdot \text{длина}}{\text{длина}} = \text{сила},$$

т. е. обобщенная сила имеет размерность силы. В том случае, когда  $[q_i] = 1$ , как это имеет место, если в качестве обобщенной координаты выбран угол,  $[Q_i]$  — момент силы.

Этот случай часто встречается при решении практических задач.

**Вычисление обобщенных сил.** 1. Обобщенную силу можно вычислить по формуле (15), ее определяющей, т. е.

$$Q_i = \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right).$$

2. Обобщенные силы можно вычислять как коэффициенты при соответствующих вариациях обобщенных координат в выражении для элементарной работы (14'), т. е.

$$\sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (15')$$

3. Наиболее целесообразен способ вычисления обобщенных сил, который получается из (15'), если системе сообщить такое возможное перемещение, при котором изменяется только одна обобщенная координата, а другие при этом не изменяются. Так, если  $\delta q_1 \neq 0$ , а остальные  $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_n = 0$ , то из (15') имеем

$$Q_1 = \frac{\left( \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{q_1}}{\delta q_1}.$$

Индекс  $q_1$  указывает, что сумма элементарных работ вычисляется на возможном перемещении, при котором изменяется

(варьируется) только координата  $q_1$ . Если изменяющейся координатой является  $q_i$ , то

$$Q_i = \frac{\left( \sum_{k=1}^N \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \right)_{q_i}}{\delta q_i}. \quad (17)$$

4. Для потенциальных сил по их определению имеем:

$$F_{kx} = \partial U / \partial x_k; \quad F_{ky} = \partial U / \partial y_k; \quad F_{kz} = \partial U / \partial z_k, \quad (18)$$

где  $U$  — силовая функция, зависящая от координат точек системы и, следовательно, через них — от обобщенных координат, т. е.

$$U = U(x_k, y_k, z_k) = U(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (19)$$

В случае нестационарных силовых полей, которые дальше не рассматриваются, силовая функция может еще явно зависеть от времени.

Для обобщенной силы, согласно ее определению, с учетом (18) и (19) имеем

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{k=1}^N \left( F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае существования силовой функции

$$Q_i = \partial U / \partial q_i = -\partial \Pi / \partial q_i, \quad (20)$$

так как потенциальная энергия системы  $\Pi$  связана с силовой функцией  $U$  соотношением

$$\Pi = -U + \text{const.}$$

Итак, обобщенная сила равна частной производной от силовой функции по соответствующей обобщенной координате.